UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT
Via Voltapaletto, 11 – 44121 Ferrara

Quaderno DEM 4/2020

July 2020

METODI STATISTICI PER IL CONFRONTO DI SERIE STORICHE CON APPLICAZIONI FINANZIARIE

Michela Borghesi

Quaderni DEM, volume 9 **ISSN 2281-9673**

Website:
http://eco.unife.it/it/ricerca-imprese-territorio/quaderni-dipartimento/quaderni-dem

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Metodi statistici per il confronto di serie storiche con applicazioni finanziarie

Michela Borghesi

Abstract

Statistical methods for comparing time series with financial applications

This paper deals with some statistical methods for the comparison of multivariate time series of arbitrary dimensions, with particular attention to the SMETS method.
As regards the application in the financial field, the case of missing data in the historical series is first dealt with, then the use of the multi-scale permutation entropy is presented.
Finally, it ends with a quick methodological comparison on how to treat time series of different lengths, in particular reference is made to the spectral domain method.

1. Introduzione

L'analisi di serie storiche è un ambito di applicazione della statistica che interessa molte aree della scienza, dell'informatica, della finanza e di altre scienze empiriche. Tale analisi può consistere in metodi inferenziali utilizzati per la previsione di valori futuri sulla base di serie storiche esistenti, oppure sul confronto tra serie storiche diverse, solitamente realizzato attraverso tecniche esplorative allo scopo di raggruppare serie storiche simili e determinare dei cluster. In questo lavoro tratteremo di questa seconda categoria di metodi statistici, meno noti e diffusi rispetto ai primi ma sempre più utilizzati soprattutto in ambito finanziario per confrontare la redditività di diverse categorie di titoli e fornire informazioni utili agli investitori.

2. Confronto di singole serie storiche

Un metodo descrittivo per confrontare due serie storiche è quello di usare una misura di somiglianza, la quale comprende metodi metrici e non metrici. Un indice di somiglianza è rappresentato da un valore che misura quanto simili sono due vettori di valori numerici. Affinché un dato metodo d sia classificato come una metrica o metrica della distanza, deve soddisfare le seguenti condizioni per ogni coppia di vettori di uguale lunghezza x e y:

- $d(x, y) \geq 0$, non negatività
- $d(x, y) = d(y, x)$, simmetria
- $d(x, x) = 0$, riflessività
- $d(x, y) = 0$ solo se $x = y$, identità
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, disuguaglianza triangolare.

Sono stati proposti numerosi metodi per calcolare la distanza tra serie storiche univariate. Alcuni dei più utilizzati sono la distanza euclidea, la distanza di Manhattan, il Dynamic Time Warping (DTW) e il Longest Common Subsequence (LCSS) (M. Vlachos et al 2002).

Tuttavia l'uso delle metriche non è sempre possibile. Alcune misure di somiglianza non metriche (cioè che non soddisfano tutte le condizioni di distanza elencate precedentemente) forniscono una prospettiva diversa sul confronto di serie storiche: infatti esse sono in grado di elaborare dati che i metodi metrici non possono elaborare e/o forniscono risultati più rilevanti per il contesto rispetto ai metodi metrici. In ogni caso, applicare tali metodi direttamente alla serie storiche originali è spesso computazionalmente complesso a causa della lunghezza delle stesse e quindi spesso si creano rappresentazioni più brevi e si valuta la distanza tra coppie di approssimazioni di serie storiche per stimare la distanza tra le serie storiche originali. I metodi in questo caso sono la trasformata discreta di Fourier, la trasformata discreta di wavelet, l'approssimazione aggregata a tratti o l'approssimazione aggregata simbolica (M. Vlachos et al 2002, R.C. Veltkamp 2001). Particolarmente interessanti sono i sistemi dinamici composti da più variabili che possono essere misurate o simulate in funzione del tempo (ne sono un esempio i portafogli azionari, in quanto insiemi di singoli titoli che sono comunque interdipendenti) (B.K. Yi et al 2000, K.P. Hart et al 2004, W.A. Wilson 1931).

I metodi elencati precedentemente consentono di confrontare due modelli dinamici (e quindi anche serie multidimensionali/multivariate) purché contengano lo stesso numero di variabili. Però gli approcci esistenti non sono applicabili quando i due modelli dinamici hanno un numero diverso di variabili componenti. In tal caso l'unico metodo è stabilire il comportamento medio di ciascun modello e quindi confrontare le due serie storiche univariate medie. Tuttavia, tale approccio può essere soddisfacente per alcune applicazioni, mentre per altre risulterebbe inutile o inappropriato (C.M.S. Sutcliffe 2006). Ad esempio, si potrebbe voler sapere se il comportamento del gruppo di 100 azioni incluso nel Financial Times e Stock Exchange è simile al gruppo di 30 azioni incluso nel New York Stock Exchange.

3. Confronto di gruppi di serie storiche

Tapinos et al (2013) propongono un nuovo metodo: la serie storica semi-metrica (Semi Metric Ensamble Time Series o SMETS), la quale è in grado di confrontare serie storiche multivariate di dimensioni arbitrarie (K.P. Hart et al 2004, W.A. Wilson 1931). Questo metodo è progettato per fornire indici numerici che misurano il livello di somiglianza tra due serie storiche multivariate: ciò si ottiene abbinando le componenti di serie storiche univariate più simili tra ciascun modello. Il metodo tiene conto anche delle differenze imputabili ai componenti univariati non abbinati quando una delle due serie storiche ha una dimensionalità più elevata rispetto all'altra.

SMETS è costituito da due parti. La prima identifica la somiglianza tra i due modelli e ha come scopo quello di collegare tutte le serie storiche univariate del modello con la più piccola cardinalità alle serie storiche univariate più simili del secondo modello. Due serie storiche univariate sono considerate simili se condividono la distanza minima tra tutte le serie storiche univariate tra i due gruppi. Ogni volta che una coppia di serie storiche viene abbinata, la loro distanza viene registrata ed entrambe le serie vengono rimosse dal processo. Tale passaggio è importante perché elimina la possibilità di corrispondenze multiple delle serie storiche univariate. Quindi dopo aver abbinato le serie storiche univariate più simili, la loro distanza complessiva viene calcolata usando una norma p

$$\|d\|_p = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} d_i^n}$$

La seconda parte aggiunge due penalità che tengono conto della differenza di cardinalità tra i modelli. Una è la penalità globale di entropia di Shannon che rappresenta l'informazione fornita dalle componenti non abbinate:

$$EP = \sum_{j=1}^{m-n} RE_j \quad \text{con} \quad RE_j = \frac{\min(d_j)(H_j)}{\sum_{i=1}^{m} H_i} \quad \text{con} \quad H_j = -\sum_{i=1}^{q} p(t_{j,i}) \log_2 p(t_{j,i})$$

Dove d_j è la più piccola distanza tra la j-esima serie storica componente non abbinata e una serie storica componente del gruppo più piccolo, m è la dimensione della serie storica più grande, H_j è l'entropia della serie storica componente j, $t_{i,j}$ è l'i-esima osservazione della serie storica componente t_j, q è la lunghezza della serie storica componente e $p(t_{j,i})$ è la frequenza relativa del valore $t_{j,i}$ nella serie storica. La seconda penalità è quella che tiene conto della differenza di dimensionalità tra le due serie storiche:

$$P = \frac{m-n}{m+n}$$

Quindi complessivamente SMETS, tenendo conto di tutte le penalità, è descritto dall'equazione:

$$SMETS = \sqrt{(\|d\|_n + EP)^2 + P^2}$$

Per quanto riguarda la complessità computazionale del metodo, SMETS è dello stesso ordine del cubo della dimensione della più grande serie storica, ciò rende l'algoritmo applicabile alla maggior parte delle applicazioni pratiche, anche in presenza di grandi dataset.

Tapinos et al (2013) hanno dimostrato l'utilità dell'applicazione di SMETS analizzando quattro dataset provenienti da diversi tipi di attività finanziarie. Considerando un insieme di dati finanziari di borsa, SMETS viene utilizzato per confrontare cinque diversi indici. Le applicazioni finanziarie sono tra quelle per le quali questo nuovo metodo sembra essere più adatto. Infatti esso può essere applicato alla stima di somiglianza tra diversi indici azionari o categorie di titoli. Molti indici di borsa sono utilizzati come parametri di riferimento per valutare la performance dei mercati finanziari.
Ogni indice contiene un certo numero di titoli azionari e solitamente viene calcolata una media ponderata per riflettere la loro performance collettiva. Dunque i dati che stono stati considerati sono serie storiche multivariate e dato che ciascuno di questi indici ha un numero diverso di componenti, SMETS è appropriato per confrontarli, poiché utilizza tutta l'informazione disponibile, diversamente dal metodo delle medie ponderate. Un altro motivo per cui questo metodo è adatto ad analizzare dati finanziari, è il fatto che i dati sui prezzi di chiusura delle azioni sono aggiornati giornalmente, ma possono esserci delle differenze del numero di dati puntuali (dati mancanti) che sono dovute al fatto che mercati diversi possono avere un numero diverso di giorni di chiusura (festività, ecc.).

In conclusione, il metodo SMETS è utile per confrontare serie storiche multivariate con diversa dimensionalità. Calcola la distanza tra i componenti più simili di due serie storiche multivariate e aggiunge i valori di penalità per tenere conto della differenza nelle loro dimensionalità, utilizzando a tale scopo anche l'entropia di Shannon. Pertanto, come detto, utilizza tutte le informazioni contenute in entrambe le serie storiche, nonostante la diversa dimensionalità, ed è perciò più diffusamente utilizzabile rispetto ad altri metodi per confronti di serie storiche multivariate quali la distanza euclidea, la distorsione temporale dinamica e la norma estesa di Frobenius, utilizzabili solo nelle applicazioni in cui le serie storiche sono di uguale dimensione. L'esempio precedente sui dati finanziari rivela un vantaggio nell'uso di SMETS rispetto al metodo delle medie ponderate (A. Tapinos et al 2013).

4. Trattamento dei dati mancanti

Nel paragrafo precedente si fa riferimento a possibili dati mancanti per differenza nel numero dei giorni di chiusura dei mercati finanziari. Questo è un problema in realtà molto diffuso nell'analisi di serie storiche. Ci sono varie ragioni che portano a valori mancanti: mancata misurazione,

misurazione e successiva perdita di dati oppure misurazione e successiva inutilizzabilità dei dati. I valori mancanti possono causare problemi perché spesso le analisi dei dati presuppongono l'osservazione del dataset completo, pertanto i dati mancanti devono essere sostituiti con valori plausibili. In statistica questo processo è chiamato imputazione dei dati mancanti.

Moritz et al (2015) considerano serie storiche a osservazioni equidistanziate nel tempo, cioè in cui gli incrementi di tempo tra punti successivi sono uguali: $|t_1 - t_2| = |t_2 - t_3| = \cdots = |t_{n-1} - t_n|$. In questo studio vengono confrontate le prestazioni degli algoritmi di imputazione su quattro diversi dataset di serie storiche mediante il pacchetto TSA di R (K.S. Chan et al 2012). Tra i dataset scelti, che sono quelli più frequentemente presenti in letteratura e rappresentativi delle diverse caratteristiche delle serie storiche, vi è anche l'indice composto S&P trimestrale, 1936Q1 - 1977Q4.

Esistono due approcci comuni per descrivere ed esaminare le serie storiche e sono l'analisi dell'autocorrelazione e la separazione nelle componenti del trend, della stagionalità e del rumore. La scomposizione delle serie storiche cerca di individuare serie di singole componenti che rappresentano ciascuna una determinata caratteristica o modello. Come sopra accennato, esistono tre componenti diverse:

1. Il trend, che esprime la progressione a lungo termine delle serie storiche;
2. La componente stagionale, che riflette i cambiamenti di livello che si ripetono ciclicamente con uguale periodo;
3. La componente irregolare, o rumore, che descrive le influenze irregolari (o residui) e che può essere casuale.

Esistono diverse tecniche per eseguire la decomposizione in componenti. Il metodo base consiste in nell'utilizzo delle medie mobili, ma esiste anche un metodo più robusto e versatile, come la decomposizione STL (**S**easonal and **T**rend decomposition using **L**oess) (R. B. Cleveland et al 1990). La decomposizione è una tecnica importante perché può migliorare molto le previsioni e i risultati di imputazione ed è spesso utilizzata per l'aggiustamento stagionale. Nell'esempio SP considerato, si ha che i dati mostrano un trend evidente ma nessuna stagionalità. L'autocorrelazione, o correlazione seriale, è una misura della correlazione interna ad una serie storica ma anche una rappresentazione del grado di somiglianza tra le serie storiche. Inoltre essa può essere un indicatore della capacità di creare previsioni e ipotesi affidabili. I valori dell'autocorrelazione oscillano tra −1 e +1: un valore di 1 significa che esiste un'associazione lineare positiva perfetta, un valore di −1 significa che esiste un'associazione lineare negativa perfetta e 0 significa che non c'è associazione lineare. Nell'esempio della serie di dati SP, si ha che esiste una forte autocorrelazione positiva.

Per quanto riguarda i dati mancanti, a seconda di ciò che li causa, la "missingness" avrà una certa distribuzione. Comprendere tale distribuzione può essere utile come conoscenza di base per la selezione di un algoritmo di imputazione appropriato e inoltre può aiutare a progettare un simulatore ragionevole, che sostituisce i dati mancanti in un dataset di serie storiche. I meccanismi di dati mancanti possono essere suddivisi in tre categorie: i dati mancanti completamente a caso, i dati mancanti a caso e i dati non mancanti a caso. Il primo può essere testato con un test *t* o un test di Little (nel pacchetto R MissMech esiste una funzione per tale diagnosi), mentre gli altri due richiedono un'analisi manuale dei modelli. I dati non mancanti a caso sono gli unici non-ignorabili e per fare l'imputazione è necessario includere un modello speciale per capire quali sarebbero i valori probabili dei dati mancanti.

Per le serie storiche univariate, il meccanismo dei dati mancanti è diverso. A prima vista c'è solo una variabile nei dati, ma in effetti il tempo deve essere trattato a sua volta come una variabile. Dunque, nel caso di dati mancanti completamente a caso, si ha che la probabilità che manchi una certa osservazione è indipendente dalla collocazione di tale osservazione nella serie e quindi è ignorabile. Nel caso di dati mancanti a caso si ha che la probabilità che manchi un'osservazione è dipendente dal punto temporale di questa osservazione nella serie. Infine, nelle osservazioni non mancanti a caso, si ha che la probabilità che un'osservazione manchi dipende dal valore dell'osservazione stessa. La valutazione delle prestazioni degli algoritmi di imputazione può essere effettuata solamente per dati mancanti simulati, e non emergerà mai quanto i valori imputati differiscano dai valori reali. Le tecniche in grado di eseguire l'imputazione per le serie storiche univariate possono essere suddivise in tre categorie:

1. algoritmi univariati, ad esempio basati su moda, media, mediana, campioni casuali;
2. algoritmi di serie storiche univariate, ad esempio gli algoritmi locf (last observation carried forward), nocb (next observation carried backward) e l'interpolazione lineare;
3. algoritmi multivariati su dati ritardati.

Per quanto riguarda l'imputazione univariata delle serie storiche in R esistono vari pacchetti, ma più popolari sono le implementazioni a imputazione multipla. Qui, per confrontare le diverse funzioni R sono stati eseguiti esperimenti con diversi dataset di serie storiche. Per poter confrontare i risultati è stato suddiviso l'approccio in due fasi: nella prima sono stati eliminati artificialmente i valori nel dataset completo con una funzione di simulazione (dati mancanti completamente a caso), nella seconda fase sono state applicate funzioni di imputazione e sono state valutate le prestazioni degli algoritmi in termini di errore quadratico medio ed errore percentuale assoluto medio.

Questa ricerca ha portato a concludere che la gestione di serie storiche univariate con algoritmi di imputazione standard non è la soluzione migliore. Tali serie storiche richiedono un trattamento speciale perché le loro caratteristiche sono diverse dalle serie multivariate. In generale gli approcci utilizzati in questi esperimenti hanno prodotto risultati mediocri se non addirittura scarsi, quindi tali approcci per serie storiche univariate devono essere applicati con cautela se non si vuole produrre risultati fuorvianti (S. Moritz et al, 2015).

5. Entropia di permutazione multi-scala

Nella ricerca di S. Chen P. Shang (2020) riguardo le metodologie statistiche impiegate nell'analisi di serie storiche, si trova un'applicazione alle serie storiche di tipo finanziario. Lo studio di sistemi complessi si riduce allo studio di serie storiche che possono avere caratteristiche diverse (K. Sathiyadevi et al 2019, P. Brockwell et al 1991). Ad esempio è possibile distinguere serie storiche stazionarie e non stazionarie. Il contributo di questa ricerca consiste nell'uso dell'entropia di permutazione multi-scala (MPE) e dell'entropia di permutazione ponderata multi-scala (MWPE) (H. Kantz et al 1997, Y. Wang et al 2018, Y. Yin et al 2014). L'entropia di permutazione è progettata per quantificare il grado di complessità basato sul confronto dei valori vicini attraverso il loro rango, e il metodo è particolarmente utile in presenza di rumore (C. Bandt et al, 2002). Nel confrontare questi due metodi sono stati applicati MPE e MWPE a dodici serie storiche simulate dimostrando che questi due metodi hanno una buona correlazione lineare che migliora se si aumenta la lunghezza della serie storica.

Per quanto riguarda le serie storiche, sono state analizzate rilevazioni giornaliere di sei indici tra cui tre mercati americani e tre asiatici e i dati originali sono stati estrapolati dal sito Web Yahoo Finance. Poiché le festività in Cina, Giappone e Stati Uniti sono diverse, questi mercati azionari hanno date di apertura diverse. Ai fini della sincronia delle serie storiche, sono stati rimossi i dati indesiderati e sono state riconnesse le serie storiche rimanenti. Di conseguenza, il totale del prezzo di chiusura registrato ha coperto il periodo dal 3 gennaio 2000 al 3 gennaio 2019 ed è di 4121 giorni.

Quando si discute della relazione tra questi due metodi, in questo studio emerge il fatto che MPE e MWPE hanno una correlazione lineare nel senso della scala multipla. Usando diversi dati simulati per studiare la loro relazione, si può vedere che questa buona proprietà lineare esiste universalmente. Troviamo che MWPE non è adatto a serie storiche periodiche a causa della sua entropia indefinita mentre il valore di MPE è zero per le serie storiche periodiche. Sono stati fatti due test: test di lunghezza dei dati e test di efficacia. Si conferma che, man mano che la dimensione dell'incorporamento aumenta gradualmente, anche le serie storiche più brevi mantengono un'ottima correlazione lineare positiva. Questa proprietà diventa sempre più evidente e la pendenza della linea di adattamento è più vicina a 1.

Testando anche la proprietà della correlazione lineare con intensità di rumore diversa, si può constatare che la relazione di linearità tra MPE e MWPE non è influenzata da livelli di rumore diversi, quindi è robusta ed efficace. Inoltre, applicando questa dipendenza lineare al mercato azionario e utilizzando la pendenza di MPE e MWPE ottenuta dalla regressione lineare, per rilevare la non linearità delle serie temporali finanziarie attraverso l'analisi dei dati surrogati, si ottiene che NASDAQ, S & P500, N225, HSI, SSEC, condividono una certa linearità con una dimensione di incorporamento più piccola. Mentre la dimensione dell'incorporamento aumenta, respingono l'ipotesi di linearità. Alla luce dei risultati ottenuti, si può concludere che MPE e MWPE hanno una buona correlazione lineare nel senso multivariato. L'universalità di questa relazione lineare e alcune differenze tra diverse serie storiche rende possibile un test statistico sulla non linearità delle serie storiche. I risultati osservati sulla non linearità, ottenuti utilizzando i dati di simulazione e serie storiche finanziarie effettivamente osservate sono concordi (S. Chen P. Shang 2020).

6. Confronto di serie storiche di diversa lunghezza

J. Caiado et al (2009) propongono un metodo basato sul dominio spettrale per gestire il confronto di serie storiche di lunghezza diversa. Il metodo rende comparabili le stime spettrali producendo statistiche alla stessa frequenza. La classificazione delle serie storiche ha utili applicazioni in molti campi. Ad esempio in finanza, si potrebbe essere interessati a classificare e raggruppare i titoli azionari allo scopo di creare un portafoglio. I metodi per il confronto di serie storiche sono stati studiati usando l'autocorrelazione e l'analisi spettrale e con metodi di adattamento del modello. D.S. Coates et al,1986, P.J. Diggle et al (1991), G.R. Dargahi-Noubary (1992), E.A. Maharaj (2002), B.G. Quinn (2006) e J. Caiado et al (2006) proposero dei metodi di dominio di frequenza per la determinazione delle serie storiche.

Un problema che spesso si pone nelle applicazioni è quello di considerare serie storiche di lunghezza differente. Ad esempio, Camacho et al (2006) trattano serie storiche di lunghezza diversa troncando quella più lunga portandola alla lunghezza di quella più corta. Caiado et al (2009) dunque cercano di risolvere questo problema aggiustando il numero di periodogrammi usati. Essi costruiscono un periodogramma interpolato per la serie più lunga alla frequenza definita dalla serie più corta. I periodogrammi forniscono statistiche utili per lo studio e il confronto di serie storiche. Siano $\{x_t, t = 1, \dots, n_x\}$ e $\{y_t, t = 1, \dots, n_y\}$ due processi stazionari con differente dimensione (si assume $n_x > n_y$). Il periodogramma della serie x_t è dato da

$$P_x(w_j) = \frac{1}{n_x}\left|\sum_{t=1}^{n_x} x_t e^{-itw_j}\right|^2,$$

dove $w_j = \frac{2\pi j}{n_x}$, per $j = 1, \dots, m_x$, con $m_x = \left[\frac{n_x}{2}\right]$, il più grande intero minore o uguale a $\frac{n_x}{2}$.

Il periodogramma della serie y_t sarà in modo simile:

$$P_y(w_p) = \frac{1}{n_y}\left|\sum_{t=1}^{n_y} x_t e^{-itw_p}\right|^2$$

con $w_p = \frac{2\pi p}{n_y}$, per $p = 1, \dots, m_y$, con $m_y = \left[\frac{n_y}{2}\right]$.

Quando $m_x \neq m_y$, w_j e w_p non coincidono. Una prima soluzione a questo problema è proposta da Wang et al 2004 e consiste nell'estendere la serie più corta y_t aggiungendo degli zeri ed ottenere così una nuova serie y_t' con la stessa lunghezza di x_t e dopodiché calcolarne il periodogramma $P_{y'}(w_j)$. Tale approccio è chiamato "zero padding".

La soluzione proposta da J. Caiado et al (2009) è invece quella di interpolare le ordinate del periodogramma della serie con lunghezza maggiore alla frequenza definita dalla serie più corta. Inoltre, per l'analisi statistica, è utile assumere omoschedasticità nel periodogramma e quindi spesso si considera il periodogramma interpolato log-normalizzato, oppure quello basato sulla stima dell'autocorrelazione (J. Caiado et al 2006, P. Galeano et al 2000).

7. Conclusioni

Il presente articolo costituisce una breve rassegna di metodi statistici applicati all'analisi di serie storiche, con particolare riferimento alle serie storiche finanziarie e ai metodi proposti in letteratura per l'analisi di questa tipologia di dati.

Oltre ai tradizionali metodi inferenziali utilizzati per la previsione di valori futuri sulla base di serie storiche esistenti, esistono e stanno sempre più diffondendosi metodi per il confronto tra serie storiche diverse, solitamente realizzati con tecniche esplorative per individuare gruppi simili di serie storiche. A questa seconda tipologia di metodi è dedicata la rassegna.

Ai metodi consolidati di studiare la similarità di serie storiche univariate e multivariate con uguale numero di componenti, si son affiancati recentemente metodi applicabili al caso di serie multivariate con un numero diverso di componenti. Altro problema su cui la letteratura invece ha già prodotto un numero di contributi molto importante, con ricchezza ed eterogeneità di spunti e di proposte, è quello dell'imputazione di dati mancanti. Proposte metodologiche recenti hanno anche riguardato l'analisi della complessità di serie storiche multivariate, così come il problema del confronto di serie storiche di diversa lunghezza, parzialmente collegato a quello dei dati mancanti.

Nonostante nuove proposte continuino ad arricchire la letteratura specializzata nell'analisi di serie storiche, metodi inferenziali per la verifica di ipotesi di gruppi di serie storiche sono tutt'oggi rari se non assenti. Questo settore dell'analisi statistica è quindi un ambito di studio che si presta ad essere esplorato allo scopo di produrre proposte metodologiche convincenti e spendibili per l'applicazione concreta in problemi empirici.

Bibliografia

1. A. Tapinos, P. Mendes, A Method for Comparing Multivariate Time Series with Different Dimensions, 2013, plus one, volume 8, issue 2.
2. B.G. Quinn, Statistical methods of spectrum change detection, Digital Signal Processing, 2006.
3. B.K. Yi, C. Faloutsos, Fast Time sequence indexing for arbitrary Lp norms, *VLDB*, 2000.
4. C. Bandt, B. Pompe, Permutation entropy: A natural complexity measure for time series, Phys. Rev. Lett. 88, 2002.
5. C. Faloutsos, M.Ranganathan, Y. Manolopoulos, Fast subsequence matching in Time-Series Databases, in *SIGMOD*, 2002.
6. C.M.S. Sutcliffe, Stock index futures, Aldershot, England:Ashgate Publishing Ltd, 2006.
7. D.S. Coates, P.J. Diggle, Tests for comparing two estimated spectral densities, Journal of Time Series Analysis, 7, 7-20, 1986.
8. E.A. Maharaj, Comparison of non-stationary time series in the frequency domain, *Computational Statistics & Data Analysis*, 2002.
9. E. J. Keogh, K. Chakrabarti, S. Mehrotra, M. Pazzani, Locally Adaptive Dimensionality Reduction for Indexing Large Time Series Databases, in *SIGMOD*, 2001.
10. G.R. Dargahi-Noubary, Discrimination between Gaussian time series based on their spectral differences, Communications in Statistics: Theory and Methods, 21, 1992.
11. H. Kantz, T. Schreiber, Nonlinear Time Series Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
12. J. Caiado, N. Crato, D. Peña, A periodogram-based metric for time series classification, Computational Statistics & Data Analysis, 50, 2668-2684, 2006.
13. J. Caiado, N. Crato, D. Pen˜a, Comparison of time series with unequal length in the frequency domain, *MPRA* Paper No. 15310, 2009.
14. K.P. Hart, J-I Nagata, J.E. Vaughan, Encyclopedia of General Topology, *Amsterdam: Elsevir*, 2004.
15. K. Sathiyadevi, S. Karthiga, V. Chandrasekar, D. Senthilkumar, M. Lakshmanan, Frustration induced transient chaos, fractal and riddled basins in coupled limit cycle oscillators, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 72 586–599, 2019.
16. K.S. Chan and B. Ripley, TSA: Time Series Analysis, R package version 1.01, 2012.

17. M. Camacho, G. Pérez-Quiroz, L. Saiz, Are European business cycles close enough to be just one?, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, 1687-1706, 2006.
18. M. Morse, J.M. Patel, An efficient and accurate method for evaluating time series similarity, *University of Michigan*, 2007.
19. M. Vlachos, G. Kollios, D. Gunopulos, Discovering smilar multidimensional trajectories, IEE 673-684, 2002.
20. N. Wang, S. Blostein, Adaptive zero-padding OFDM over frequency-selective mutipath channels, *Journal on Applied Signal Processing*, 10, 2004.
21. P. Brockwell, R. Davis, Time Series: Theory and Methods, *Springer Series in Statistics*, 1991.
22. P. Galeano, D. Pen˜a, Multivariate analysis in vector time series, *Resenhas*, 4, 2000.
23. P.J. Diggle, N.I. Fisher, Nonparametric comparison of cumulative periodgrams, *Applied Statistics*, 1991.
24. R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J. E. McRae, I. Terpenning, Stl: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess, *Journal of Official Statistics*, 6(1):3–73,1990.
25. R.C. Veltkam, Shape matching: similarity measures and algorithms, 2001.
26. S. Chen, P. Shang, Financial time series analysis using the relation between MPE and MWPE, *Nonlinear Dynam*, 2020.
27. S. Moritz, A. Sardà, T. Bartz-Bielstein, M. Zaefferer, J. Stork, Compa- rison of different Methods for Univariate Time Series Imputation in R, *Research paper*, 2015.
28. W.A. Wilson, On Semi-Metric Spaces, Am J Maths 53, 1931.
29. Y. Wang, P. Shang, A new measurement of financial time irreversibility based on information measures method, *Physica* A 503, 2018.
30. Y. Yin, P. Shang, Weighted multiscale permutation entropy of financial time series, *Nonlinear Dynam*. 78, 2014.