Università degli Studi di Ferrara

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA, ISTITUZIONI, TERRITORIO

Corso Ercole I D'Este n.44, 44100 Ferrara

Quaderni del Dipartimento

N.1/2004

Gennaio 2004

Andrea Calamanti

Il valore delle azioni in contesti di crescita con ROE marginale diverso da quello medio. Limiti del modello di Gordon e possibili alternative.

Gennaio 2004

Il valore delle azioni in contesti di crescita con ROE marginale diverso da quello medio. Limiti del modello di Gordon e possibili alternative.

Andrea Calamanti

Sommario

Le imprese che hanno raggiunto la fase di maturità, e per le quali si prevede una crescita "normale" con formazione equilibrata dei flussi finanziari, sono comunemente valutate mediante il modello di Gordon. Tale modello non appare appropriato nei casi, invero poco frequenti, ma possibili e interessanti, di crescita caratterizzata da un ROE dei nuovi investimenti diverso da quello del capitale inizialmente in essere. Ciò in quanto viene meno una delle condizioni alla base di esso: l'uniformità di sviluppo delle grandezze aziendali. Partendo da questa constatazione, è stata ricostruita la dinamica economico, finanziaria e patrimoniale tipica di tali contesti ed stata ricavata una formula valutativa puntuale; formula coincidente con la quella di Gordon opportunamente rettificata ed espressa in termini più analitici e maggiormente esplicativi. Ne è stata verificata la correttezza mediante simulazione della crescita per autofinanziamento e per apporti esterni di capitale, provvedendo a stimare il valore nel tempo delle azioni e degli eventuali diritti d'opzione. Da ultimo si è provveduto a quantificare l'errore che si commetterebbe applicando il modello di Gordon tout-court. Incidentalmente è stata altresì riprovata la piena validità e versatilità del modello del VANOC, di norma meno praticato.

1. Premessa

Il presente articolo trae origine da un più ampio studio sulle condizioni di convergenza dei metodi di valutazione d'impresa basati sull'attualizzazione dei flussi (*Discounted Cash Flow, Economic Value Added, Adjusted Present Value*) nei rispettivi approcci *assets side* ed *equity side*.

In particolare esso prende le mosse dalla constatazione che nei principali manuali di finanza aziendale e nei testi di *valuation* -allorchè si considera l'ipotesi della crescita continua con orizzonte infinito e si applica la nota formula di Gordon- si assume che il tasso di crescita, nello specifico dei flussi di cassa disponibili, sia comunque costante e che, dalla fine di una fase di sviluppo ad un'altra, detto tasso passi ad un nuovo livello ove permarrà stabilmente se trattasi della fase di maturità, o temporaneamente se trattasi di fase intermedia a sviluppo costante. Nei modelli a più stadi il contesto tipico cui ci riferiamo riguarda la stima del cosiddetto "valore finale".

Un altro aspetto che si coglie dalla lettura di detti testi è che difficilmente si esplicita la redditività del capitale in essere o si da modo al lettore di ricavarla: di norma anche negli esempi addotti viene indicato il primo flusso di cassa disponibile agli inizi della fase di crescita. Flusso che, al massimo, si riesce a disaggregare in utile complessivo e reinvestimento. La mancanza di tale elemento non consente di ricostruire compiutamente la dinamica economico, finanziaria e patrimoniale dell'impresa considerata, di valutarne le coerenze e, quindi, di procedere a verifiche puntuali dei valori ottenuti.

Queste ed altre osservazioni che via via emergeranno ci hanno indotto ad approfondire l'argomento e a intraprendere la presente ricerca i cui risultati, con riferimento alla versione equity side del metodo dello sconto dei flussi di cassa disponibili, possono essere così riassunti.

Le imprese che entrano in una fase di maturità, e per le quali si prevede una crescita stabile e sostenibile all'infinito, possono essere valutate, a livello di equity, mediante la classica formula di Gordon:

$$Ve = \frac{DIV_{t+1}}{Ke - g^{DIV}}$$

dove: Ve = valore del capitale economico o dell'equity dell'impresa;
DIV_{t+1} = dividendi del periodo t+1, pari a tutto il flusso di cassa disponibile per gli azionisti: utili netti $_{t+1}$-reinvestimenti $_{t+1}$;
Ke = costo del capitale proprio;
g^{DIV} = tasso di sviluppo di DIV_{t+1}.

In tale formula[1] g^{DIV} è considerato costante, dato un quadro di riferimento ove sono costanti -e uguali tra di loro- anche i tassi di sviluppo delle altre grandezze: utili, capitale investito, capitale proprio e così via.

Queste ipotesi, ed altre implicite, sono corrette se la redditività dei nuovi investimenti è uguale a quella del capitale in essere. Nel caso contrario, la dinamica economico-finanziaria e patrimoniale dell'impresa è diversa e la formula di Gordon non la riflette puntualmente, né stima con precisione Ve, pur fornendone, come vedremo, valori molto prossimi e soddisfacenti.

Partendo da tale constatazione abbiamo ricostruito, con l'ausilio di un caso semplificato, la suddetta dinamica e i relativi vincoli. Abbiamo poi individuato una formula di valutazione appropriata che assume la seguente configurazione:

$$Ve_t = CN_t \frac{ROE_t - g^{CN}}{Ke - g^{CN}} + CN_t * \frac{g^{CN}}{Ke} * \frac{ROE_\Delta - ROE_t}{Ke - g^{CN}}$$

Nell'equazione compaiono i tassi di redditività del capitale proprio in essere (ROE_t) e di quello relativo ai nuovi investimenti (ROE_Δ). Il secondo viene assunto come costante, mentre il primo muta di anno in anno per effetto della crescita, fintanto che non si ricongiunge a ROE_Δ.
Inoltre il tasso di crescita non è più quello dei dividendi, bensì quello dei mezzi propri (g^{CN}) che, come chiariremo, resta costante.

L'espressione fino al segno più equivale alla formula di Gordon nell'ipotesi di $ROE_\Delta=ROE_t$. La parte successiva funge da "fattore di rettifica", ossia corregge il Ve così calcolato, in funzione del differenziale di rendimento dei nuovi investimenti, nonché del loro tasso di crescita e del costo del capitale.

La formula che, come vedremo, può essere ricavata dal modello del valore attuale delle opportunità di crescita (VANOC o VAOC), è stata testata sia a livello di coerenza dei rendimenti annui attesi, sia di evoluzione del valore delle azioni e della ricchezza degli azionisti in caso di aumenti di capitale per autofinanziamento o per apporti esterni, con conseguente definizione del valore del diritto d'opzione e della posizione d'indifferenza per i vecchi e per i nuovi azionisti.

Il che ha consentito di ricostruire puntualmente la dinamica del valore e della performance aziendale nei suoi principali aspetti, incluso quello connesso al finanziamento della crescita e alle modalità di reperimento dei mezzi propri.

2. Crescita in costanza di ROE e valore dell'equity. Una diversa espressione della formula di Gordon.

Di qui in avanti faremo riferimento ad imprese che, raggiunta la fase di maturità, crescono di anno in anno con un orizzonte infinito. E' un caso tipico di valutazione riguardante, sia le imprese che si trovano già in tale stadio, sia quelle che vi entreranno in un momento successivo[2].

Nella fase di maturità, caratterizzata da formazione equilibrata dei flussi di cassa con relativa stabilità del costo del capitale, si assume che la crescita aziendale sia contraddistinta da uniformità di variazione di tutte le grandezze.

In particolare, essendo stata conseguita una struttura finanziaria ottimale[3], il finanziamento dei nuovi investimenti avverrà sempre nelle stesse proporzioni tra debito e mezzi propri; sicché il tasso di sviluppo di entrambi sarà uguale a quello del capitale investito: $g^{CN}=g^{D}=g^{CIN}$. Questa condizione, del resto, è necessaria poiché, in ipotesi contraria, l'azienda crescendo finirebbe per disattendere il target di leverage desiderato e per essere interamente finanziata con debito o con mezzi propri. Lo rimarchiamo subito in quanto trattasi di una condizione centrale nella successiva analisi.

Un ulteriore assunto per evitare analoghe incoerenze e difficoltà valutative -pienamente in linea con il contesto di riferimento e con la fissità della leva finanziaria- è che il ROE riferibile ai nuovi investimenti (ROE_Δ) sia costante, oltre che "normale"[4].

La costanza di ROE_Δ richiede anche che all'attivo si mantenga inalterata la proporzione tra il capitale circolante (CCN) e la struttura (CF) e, quindi, che entrambi si sviluppino allo stesso tasso. Ipotesi, questa, corretta e coerente, che assicura una crescita degli ammortamenti (AMM) stabile e con la medesima intensità; evitando così che, in difetto, la costanza di ROE_Δ debba essere assicurata da una continua modifica, a compensazione, del tasso di incremento dei ricavi (FAT) o dei costi monetari al netto degli interessi passivi (CSM)[5]. Il che, oltre a non essere realistico, risulterebbe particolarmente complesso e macchinoso. Senza questo assunto, del resto, ROE_Δ varierebbe di anno in anno, rendendo impossibile l'applicazione del modello valutativo in esame pur con le modifiche che evidenzieremo[6].

Per delineare lo sviluppo dell'impresa nel contesto descritto facciamo riferimento ad un caso.

Prima, però, aggiungiamo una condizione non sempre esplicitata e riguardante la redditività del capitale in essere o ROE_t: la poniamo uguale a quella dei nuovi investimenti. Stante tale identità, essa rimane invariata nel tempo. In altre parole, la crescita non modifica la redditività media. Nel caso contrario essa implica una continua variazione di ROE_t con conseguenze che analizzeremo in un successivo paragrafo.

Veniamo all'esempio di riferimento, costituito da un'impresa avente un capitale investito (CIN) di 1.000, finanziato con 400 di debiti (D) e 600 di mezzi propri (CN), un risultato operativo (RO o EBIT) di 180 (18% del CIN), un utile netto (UN) di 104, un ROE_0 del 17,33% e un costo del capitale proprio (Ke) del 13%[7]. Il capitale è ripartito in 100 azioni di valore nominale pari a 6.

L'impresa è entrata in una fase di maturità e si stima che di qui all'infinito si svilupperà al 2% annuo, che i nuovi investimenti avranno un ROE uguale a quello del capitale in essere e saranno finanziati mantenendo invariata la leva finanziaria.

In queste condizioni, come agevolmente riscontrabile dalla tab.1, tutte le grandezze economiche, patrimoniali e finanziarie cresceranno al 2% annuo. Il termine crescita non genera equivoci di riferimento: il tasso **g** è il medesimo per tutti gli aggregati, tant'è che si può parlare di crescita senza ulteriori specificazioni.

Quanto vale il capitale economico (Ve) della nostra impresa?

Ricorrendo al metodo dell'attualizzazione dei flussi di cassa disponibili per gli azionisti, che facciamo collimare con i dividendi distribuiti (DIV)[8], Ve è uguale al valore attuale di tutti i DIV futuri, attualizzati ad un tasso pari al costo del capitale proprio Ke.
Nel calcolo ci soccorre la nota formula di Gordon[9], secondo cui:

$$[\,1\,]\quad Ve_t = \frac{DIV_{t+1}}{Ke - g^{DIV}}$$

La [1] equivale alla formula del valore di una rendita perpetua a rate crescenti. La prima rata -DIV_1- è pari a 92: l'utile netto del primo esercizio[10] (UN_0=104), meno i reinvestimenti a titolo di mezzi propri necessari per finanziare lo sviluppo (ΔCN_0=12). Essa, stante la rilevata uniformità di quest'ultimo, crescerà al 2% annuo.

Il valore dell'equity dell'impresa è pari a:

$$Ve_0 = \frac{92}{0{,}13-0{,}02} = 836{,}3636$$

e, di anno in anno, aumenterà in ragione di **g**=2%.

In tali condizioni il valore delle azioni per unità di contenuto patrimoniale resta costante. Lo si può evincere con immediatezza anche dal rapporto Ve/CN, o multiplo del patrimonio, il cui numeratore e denominatore si accrescono allo stesso tasso **g**.

Il valore di una singola azione presenterà quindi un andamento in linea con quello del suo contenuto patrimoniale. Agli estremi: crescerà in ragione di **g**, se il suo contenuto patrimoniale verrà fatto lievitare per effetto del reinvestimento degli utili a integrale finanziamento dei ΔCN; resterà stabile, se alla crescita del CN, attuata o mediante autofinanziamento o mediante apporti esterni, corrisponderà una contestuale assegnazione di azioni (gratuite o a pagamento) emesse alla pari.

Insomma, tutto si sviluppa al 2%, abbiamo un unico tasso **g**, e tutto è abbastanza semplice da seguire.

Ma torniamo alla formula onde esprimerla un modo diverso e funzionale alla successiva analisi. Sostituendo DIV_{t+1} con l'espressione sopra esplicitata e tenendo conto che $g^{DIV} = g^{CN}$, si ottiene:

$$Ve_t = \frac{UN_t - \Delta CN_t}{Ke - g^{CN}}$$

ossia:

$$[\,2\,] \quad Ve_t = CN_t \frac{ROE_t - g^{CN}}{Ke - g^{CN}}$$

La 2 esplicita i driver del valore e ha il pregio di evidenziare il ROE del capitale in essere che, essendo uguale a quello marginale, lo rappresenta. Il valore dell'equity dipende dalla redditività dei mezzi propri, dal loro tasso di crescita e dal loro costo. Non importa se essi si incrementano per apporti esterni in presenza di totale distribuzione degli utili ovvero per ritenzione di questi ultimi[11]: ciò che conta non è il tasso di reinvestimento di UN, ma quello di incremento del capitale investito pari, stante la costanza della leva finanziaria, a quello di CN.

E' appena il caso di osservare che, in assenza di crescita, la [2] si riduce alla formula del valore di una rendita a rata costante:

$$[3] \quad Ve_t = CN_t \frac{ROE_t}{Ke}$$

e il valore dell'equity[12] è pari ad 800.

Dunque, se l'impresa rimane così com'è, il suo capitale economico vale costantemente 800; se invece si sviluppa al 2% annuo, investendo in progetti che hanno lo stesso ROE dei capitali in essere, esso si eleva a 836,36 e, nel tempo, si accresce allo stesso ritmo. Per inciso, la differenza tra i due livelli di Ve -36,3636- esprime il valore delle opportunità di crescita che si prospettano all'impresa di qui all'infinito.

Ma che cosa accade se la redditività dei nuovi investimenti (ROE_{Δ}) è diversa da quella dei capitali in essere (ROE_t)?

Innanzi tutto giova ricordare che, fintanto che essa è superiore al costo del capitale, la crescita crea valore e Ve si attesta a un livello superiore alle 800 dell'ipotesi di stazionarietà. Come misurare tale differenza –ossia il valore delle opportunità di crescita– lo vedremo poi. Cerchiamo invece di capire come si sviluppa l'impresa quando ROE_{Δ} è diverso da ROE_t e qual'è la formula corretta per misurarne il valore.

3. Crescita in presenza ROE_{Δ} diverso da ROE_t e divenire d'impresa. Applicabilità della formula di Gordon.

Supponiamo che la redditività dei nuovi investimenti sia inferiore a quella del capitale in essere. Quanto osserveremo vale, specularmente, per il caso opposto di $ROE_{\Delta}>ROE_t$.

In questo contesto ROE_t non è più costante, ma diminuisce di anno in anno finché non raggiunge un livello pari a ROE_{Δ}.

Poiché lo sviluppo implica un incremento del CIN del 2% annuo, CN e D debbono accrescersi allo stesso tasso per evitare modifiche della leva finanziaria che, altrimenti, a lungo andare si sbilancerebbe completamente in un senso o nell'altro.

Ne consegue che il tasso di reinvestimento degli utili o di autofinanziamento[13] **-α-** non puo' rimanere costante: deve aumentare per compensare la parallela riduzione di ROE_t ed evitare una continua espansione del grado d'indebitamento. A conti fatti, **α** passa dall'11,5385% del primo anno all'11,5690% nel secondo, e via di seguito[14].

Il tasso di crescita dei dividendi, g^{DIV}, segue un trend simile: la minore redditività dei nuovi investimenti lo comprime, a t_0, all'1,6957%; la progressiva riduzione di ROE_t lo rende variabile; il comportamento di **α** fa sì che esso aumenti progressivamente portandosi verso g^{CN}=2%, ove si stabilizzerà.[15]

Il tasso di crescita degli utili, g^{UN}, si muove analogamente: da un livello iniziale di 1,7308% -un po' più alto di g^{DIV}- via via si eleva verso g^{CN}.

Va da sé che, in queste condizioni, anche il valore dell'equity non segue più un sentiero di crescita uniforme né, anticipiamo, uguale a quello di DIV o di UN.

Il quadro è dunque molto più complesso rispetto al caso precedente, e la mente fa fatica a dominarlo con immediatezza. Per non appesantire la trattazione, limitiamoci a sintetizzare i seguenti punti[16]:

- g^{CIN}, g^{CN} e g^{D} restano costanti;
- **α** non può più rimanere costante ma deve accrescersi continuamente;
- g^{UN} e g^{DIV} non sono più costanti, né sono uguali tra di loro; il primo è leggermente superiore al secondo e tale si mantiene anche nell'iter di crescita.

Abbiamo rimarcato quest'ultimo aspetto per due motivi:

1. g^{DIV} appare al denominatore della formula di Gordon, ma per una particolare combinazione finisce per essere sostituito da g^{UN} anche quando, come nella fattispecie in esame, i due non coincidono;

2. il fatto che essi non siano costanti, fa sì che la formula di Gordon non fornisca risultati precisi.

Proviamo ad applicarla assumendo, come si è soliti fare, uno stato di uniformità della crescita. DIV_1 e Ke sono i medesimi; g^{DIV} è invece pari a 1,69565% (valore al primo anno):

$$[4]\ Ve_0 = \frac{92}{0{,}13 - 0{,}0169565} = 813{,}8460$$

Secondo tale formula, se la redditività dei nuovi investimenti è pari al 15%, contro il 17,33% del capitale in essere, il valore dell'equity a t_0 si attesta a 813,8460.

Dobbiamo però segnalare che, forse per un errore voluto, il tasso di crescita comunemente assunto non è g^{DIV}, ma finisce per essere g^{UN}. Chiariamolo.

Nei vari testi che si occupano della materia, e nello stesso articolo di Gordon, g^{DIV} viene calcolato come prodotto tra l'indice di reinvestimento e la redditività dei nuovi investimenti[17]:

$$[5] \quad g^{DIV}_t = \boldsymbol{\alpha}_t * ROE_\Delta$$

Tale identità è però esatta se $ROE_\Delta = ROE_t$, altrimenti non lo è. Nel caso di difformità, come quello in esame, essa finisce per definire g^{UN}. Infatti: 11,5385%*15%=17,3077%, che è proprio il g^{UN} dell'anno iniziale[18].

Per $ROE_\Delta \neq ROE_t$ la corretta espressione di g^{DIV}_t, tra le diverse possibili, è[19]:

$$[5a] \quad g^{DIV}_t = (1+g^{CN}) \frac{ROE_{t+1} - g^{CN}}{ROE_t - g^{CN}} - 1$$

Sicché, quando si adotta la [5], si afferma di applicare il tasso di crescita dei dividendi, mentre di fatto si tratta di quello degli utili, e il valore dell'equity risulta un po' più alto:

$$[4a]\ Ve_0 = \frac{92}{0{,}13 - 0{,}0173077} = 816{,}3823$$

Singolare e utile combinazione che, vedremo, accresce significativamente la capacità di approssimazione della formula di Gordon.

Ma, a prescindere dalle implicazioni in parola, ci sembra degno d'interesse l'aver individuato un'incoerenza circa l'equazione definitoria del tasso di crescita dei dividendi; equazione basilare, ampiamente diffusa in finanza aziendale e nelle sue applicazioni operative. Si pensi agli errori che può trascinare in vari contesti, quando ROE_t non è costante.

Tornando agli aspetti quantitativi emerge, dunque, la necessità di ovviare al problema della stima di g^{DIV} e della sua variabilità. A tal fine faremo in modo che esso non entri più nelle equazioni dei modelli in esame e che, in suo luogo, si adotti g^{CN}. Il termine crescita sarà così inequivocabilmente riferito al capitale (proprio o complessivo)[20] investito.

4. Segue: il valore dell'equity secondo il modello del VANOC.

Proviamo ora a definire Ve mediante il modello del VANOC. Seguiamo questo iter in quanto la formula puntuale che proponiamo, in luogo di quella di Gordon, può essere agevolmente derivata dalle equazioni di tale modello. Per il vero, il nostro approccio è stato inizialmente diverso[21], ma la sua maggiore complessità sconsiglia di farne cenno.

Il metodo del VANOC presenta il vantaggio di tener separata la redditività del capitale in essere da quella dei futuri investimenti. Il che è particolarmente utile ai nostri fini.

Secondo tale metodologia, il valore dell'equity viene ottenuto sommando al valore calcolato in ipotesi *steady state* (Ve') il valore attuale di tutte le opportunità di crescita che si offrono all'impresa di qui all'infinito:

$$[6] \quad Ve_0 = Ve'_0 + VANOC_0$$

Ve'_0 è stato già definito con la [3], che andiamo a sostituire:

$$[7] \qquad Ve_0 = CN_0 \frac{ROE_0}{Ke} + VANOC_0$$

Per quanto concerne il VANOC, tenendo conto che le opportunità di crescita richiedono un investimento annuo (ΔCIN) del 2%, e un pari incremento di CN da cui ci si attende un ROE_Δ del 15%, possiamo iniziare a definire il valore attuale netto delle opportunità di crescita relative al primo anno, che indichiamo con VAN_0. Esso è uguale alla somma algebrica tra il capitale investito ($-\Delta CN_0$) e il valore attuale dei flussi di cassa che promaneranno dall'investimento di qui all'infinito (gli utili netti annui che danno luogo a una rendita perpetua a rata costante):

$$[8] \quad VAN_0 = -\Delta CN_0 + \Delta CN_0 \frac{ROE_\Delta}{Ke}$$

ossia:

$$[9] \quad VAN_0 = \Delta CN_0 \frac{ROE_\Delta - Ke}{Ke}$$

Analogamente definiamo VAN_1:

$$VAN_1 = \Delta CN_1 \frac{ROE_\Delta - Ke}{Ke}$$

che, essendo $\Delta CN_1 = \Delta CN_0*(1+g^{CN})$, può essere espresso nel modo seguente:

$$VAN_1 = VAN_0*(1+g^{CN})$$

E così gli altri successivi, tanto dar luogo alla seguente successione:

$$VAN_0;\ VAN_0*(1+g^{CN});\ VAN_0*(1+g^{CN})^2;\ \ldots\ldots\ VAN_0*(1+g^{CN})^{\infty}$$

A questo punto è agevole determinare il valore attuale di tutte le opportunità di crescita, trattandosi di una rendita perpetua la cui rata iniziale cresce in ragione di g^{CN}:

$$[10]\quad VANOC_0 = \frac{VAN_0}{Ke - g^{CN}}$$

ossia:

$$[10a]\quad VANOC_0 = \Delta CN_0 \frac{ROE_{\Delta} - Ke}{Ke*(Ke - g^{CN})}$$

Sostituendo la [10a] nella [7] e CN_0*g^{CN} a ΔCN_0, otteniamo l'equazione di Ve che contestualmente riferiamo ad una generica epoca t:

$$[11]\qquad Ve_t = CN_t \frac{ROE_t}{Ke} + CN_t*g^{CN} \frac{ROE_{\Delta} - Ke}{Ke*(Ke - g^{CN})}$$

L'equity della nostra impresa, secondo il modello del VANOC, a t_o, vale 816,7832, di cui: 800 è il valore in assenza di crescita (espressione fino al segno più, equivalente ad una rendita perpetua a rata costante); 16,7832 è il valore delle opportunità di crescita[22] (espressione dopo il segno più).

Si tratta di un valore un po' diverso da quello individuato con la formula di Gordon. La differenza è trascurabile se in Gordon si applica il tasso di crescita degli utili (816,3823), è un po' più elevata se si adotta l'effettivo tasso di crescita dei dividendi (813,8460).

Sicuramente il valore puntuale è fornito dal modello del VANOC. Stante l'entità delle differenze rilevate, l'equazione di Gordon resta comunque valida ancorchè, vedremo, l'imprecisione si accentua in contesti caratterizzati da tassi di sviluppo più elevati e da una maggiore differenza tra ROE_t e ROE_{Δ}.

In luogo di essa può ben assumersi la [11]. Proviamo, tuttavia, ad individuare un'ulteriore espressione, altrettanto agevole da applicare e che sia puntuale come il modello del VANOC. Lo sarà di certo se la ricaviamo da esso!

5. Segue: la formula di determinazione del valore dell'equity.

Riprendiamo la [11] e sviluppiamola come segue:

$$Ve_t = CN_t * \left[\frac{ROE_t}{Ke} + \frac{g^{CN}*(ROE_\Delta - Ke)}{Ke*(Ke - g^{CN})} \right]$$

$$Ve_t = CN_t * \left[\frac{ROE_t*(Ke - g^{CN}) + g^{CN}*(ROE_\Delta - Ke)}{Ke*(Ke - g^{CN})} \right]$$

$$Ve_t = CN_t * \left[\frac{g^{CN}*(ROE_\Delta - ROE_{t)}) + Ke*(ROE_t - g^{CN})}{Ke*(Ke - g^{CN})} \right]$$

$$Ve_t = CN_t * \left[\frac{g^{CN}*(ROE_\Delta - ROE_{t)})}{Ke*(Ke - g^{CN})} + \frac{Ke*(ROE_t - g^{CN})}{Ke*(Ke - g^{CN})} \right]$$

$$Ve_t = CN_t * \left[\frac{g^{CN}}{Ke} * \frac{ROE_\Delta - ROE_t}{Ke - g^{CN}} + \frac{ROE_t - g^{CN}}{Ke - g^{CN}} \right]$$

modifichiamo la disposizione e otteniamo**:**

$$[12] \qquad Ve_t = CN_t * \frac{ROE_t - g^{CN}}{Ke - g^{CN}} + CN_t * \frac{g^{CN}}{Ke} * \frac{ROE_\Delta - ROE_t}{Ke - g^{CN}}$$

Si tratta dell'equazione che avevamo introdotto nella premessa e che corrisponde, se così può dirsi**,** alla formula di Gordon "rettificata". La prima parte, fino al segno più, è l'espressione alternativa della formula di Gordon in presenza di ROE_Δ=ROE_t, corrisponde alla [2] e definisce Ve in tali condizioni. La seconda parte costituisce un "fattore di rettifica" del Ve così ottenuto; fattore di rettifica il cui valore rimane costante nel tempo[23].

Con riferimento all'anno iniziale, Ve risulta pari a:

$$Ve_0 = 836{,}3636 - 19{,}5804 = 816{,}7832$$

perfettamente uguale a quello ottenuto con il modello del VANOC. Del resto non può che essere così, avendo derivato la [12] da esso.

E' appena il caso di osservare che per determinare l'evoluzione nel tempo di Ve -stante la non costanza e la complessità di determinazione della sua ragione di crescita- conviene continuare ad avvalersi della [12] sostituendo via via il valore di ROE_t.

Torniamo, piuttosto, alla formula per illustrarne l'universalità di applicazione e la relativa coerenza. Al riguardo è sufficiente riferirsi ai seguenti contesti che compendiano la possibile casistica. Per ognuno indicheremo la configurazione che la formula assume e la relativa equivalenza.

1. Crescita in uniformità di ROE ($ROE_{\Delta}=ROE_t$). Si annulla il fattore di rettifica e resta solo la prima parte corrispondente alla [2]; lo abbiamo appena esaminato, Ve_0 è pari a 836,3636.

2. Crescita in presenza di $ROE_{\Delta}>ROE_t$. Il fattore di rettifica diventa positivo e addiziona valore. Se, ad esempio, la redditività dei nuovi investimenti fosse del 20%, il valore dell'equity passerebbe a 858,74126.

3. Assenza di crescita. Posto $g^{CN}=0$, il fattore di correzione si annulla e la prima parte si riduce alla formula di una rendita perpetua a rata costante, come la [3]: $Ve_t=CN_t * ROE_t/Ke$. Ve_0 è pari a 800.

4. Crescita con ROE_{Δ} uguale al costo del capitale. Posto $ROE_{\Delta}=Ke$, e sviluppando[24], la [12] si riduce alla [3], e si conferma la nota legge secondo cui quando la redditività dei nuovi investimenti è uguale al costo del capitale non si ha creazione di valore, ma solo rigonfiamento dimensionale. Ve_0 è pari a 800, come nel caso di assenza di crescita.

Abbiamo incentrato la nostra attenzione sulla [12], preferendola in quanto immediatamente raffrontabile alla formula di Gordon. Dobbiamo però segnalare, posto ve ne sia bisogno, che essa è in tutto e per tutto equivalente alla [11]. La differenza tra le due è che la prima addiziona il valore della crescita a quello di Ve calcolato in ipotesi *steady state,* mentre la seconda calcola Ve in ipotesi di crescita con stabilità di ROE_t e "lo rettifica" in funzione dello scarto $ROE_{\Delta}-ROE_t$[25].

6. Verifiche di coerenze: autofinanziamento e aumenti di capitale per apporti esterni; valore delle azioni e dei diritti d'opzione.

Proviamo ora a verificare l'esattezza della [12]; verifica che vale anche per la [11]. L'esercizio servirà altresì a delineare l'andamento nel tempo di Ve e ad individuare il valore delle singole azioni e dei diritti d'opzione relativi ad aumenti di capitale a pagamento (funge da supporto la tab.3)

Iniziamo con l'ipotesi di finanziamento dei ΔCN_t esclusivamente con ritenzione di utili.
Secondo la [12] Ve passa da 816,7832 di t_0 a 830,9649 di t_1, con un incremento assoluto di 14,1817. Se ad esso aggiungiamo 94 di dividendi erogati nel periodo troviamo il rendimento complessivo ritratto da un ipotetico proprietario di tutte azioni: 106,1817.
Rapportato al valore iniziale, l'investimento ha prodotto un rendimento del 13%, perfettamente in linea con quello desiderato dagli azionisti, ovvero con il costo del capitale Ke. Ripetendo la verifica per tutti gli anni successivi si riscontra sempre il medesimo saggio di rendimento. Sicché la formula è valida e corretta[26].

Relativamente al valore delle singole azioni, è agevole osservare che, se alla ritenzione di utili non si accompagna alcun aumento gratuito di capitale, il loro valore unitario cresce in linea con quello di Ve_t: 8,16783; 8,30965; 8,45430…. (tab. 3, colonna 2).
Se, invece, vengono sistematicamente effettuati aumenti gratuiti di capitale con assegnazione di azioni alla pari, il numero dei titoli in circolazione aumenta (in ragione di g^{CN}) e parallelamente il valore delle singole azioni diminuisce: 8,16783; 8,14671; 8,12601….. Stesso andamento si rileva in caso di aumenti di capitale a pagamento che analizzeremo qui di seguito (tab. 3 colonna 6). La ragione è intuibile: restando fermo il contenuto patrimoniale per azione, il valore si contrae per effetto della progressiva riduzione di ROE_t.

Passiamo all'ipotesi di integrale distribuzione degli utili ($DIV_t=UN_t$) e di reperimento dei mezzi propri mediante apporti esterni con emissione di azioni alla pari.

Sorge il problema di individuare il valore dei diritti d'opzione. Proviamo a risolverlo, fingendo di non conoscere l'evoluzione nel tempo del valore delle azioni.
Partiamo della seguente identità che definisce, in funzione del costo del capitale, la posizione di equilibrio dei vecchi azionisti:

$$[13]\quad Ve_{t+1} \frac{NAZ_t}{NAZ_{t+1}} + UN_t + VD_t = Ve_t\,(1+Ke)$$

dove: NAZ_{t+1} = numero di azioni esistenti post aumento di capitale, pari a $NAZ_t*(1+g^{CN})$;
NAZ_t = numero di azioni esistenti ante aumento di capitale.

Da essa si desume che il valore post aumento delle vecchie azioni, più i dividendi incassati nel periodo ($DIV_t=UN_t$) e i diritti d'opzione monetizzati (VD_t), deve esser uguale al loro valore ante aumento (Ve_t) capitalizzato a Ke.

Non conoscendo Ve_{t+1} conviene definirlo in termini di VD_t. Poiché il valore dei diritti sommato al costo sostenuto per la sottoscrizione delle nuove azioni (ΔCN_t) deve essere uguale al valore di esse post aumento[27]:

$$[14]\quad Ve_{t+1} \frac{\Delta NAZ_t}{NAZ_{t+1}} = VD_t + \Delta CN_t$$

isolando Ve_{t+1} -e avendo presente che il numero delle nuove azioni emesse, ΔNAZ_t, è uguale a NAZ_t*g^{CN}- si ha:

$$[15]\quad Ve_{t+1} = (VD_t + \Delta CN_t) \frac{NAZ_{t+1}}{NAZ_t*g^{CN}}$$

Sostituiamo nella [13] a Ve_{t+1} la [15] e, con un semplice sviluppo, otteniamo il valore complessivo dei diritti d'opzione:

$$[16]\quad VD_t = Ve_t \frac{(1+Ke)*g}{1+g} - \frac{\Delta CN_t}{1+g} - \frac{UN_t*g}{1+g}$$

Con riferimento al primo aumento di capitale VD è pari a 4,29343 ed assicura una perfetta posizione di indifferenza ai nuovi e ai vecchi azionisti.

Limitandoci a considerare i primi[28] osserviamo che, sommando VD al costo di sottoscrizione delle nuove azioni e dividendo per il numero delle stesse si ottiene, a riprova, il valore di una singola azione a t_1:

$$(4{,}29343+12)/2 = 8{,}14671.$$

Valore che risente, sia delle modalità di aumento di CN appena esaminate, sia delle condizioni di sviluppo. Come queste ultime dispiegano la loro influenza lo abbiamo individuato puntualmente grazie alla [12], appurando anche la piena validità del modello del VANOC.

Con il medesimo procedimento si può verificare la congruità dei livelli cui si attestano le variabili in esame nei periodi successivi al primo.

7. Le differenze rispetto alla formula di Gordon.

Concludiamo con un breve cenno circa il grado di approssimazione della formula di Gordon e i fattori influenti. Un sorta di analisi di sensitività.

Il fattore di maggior rilievo è il tasso di crescita. Per evitare equivoci precisiamo subito che intendiamo riferirci al fatto di assumere al denominatore di detta formula l'effettivo tasso di crescita dei dividendi o, in sua vece, quello degli utili. Cosa, questa, che accade -consapevolmente o meno- allorché, in presenza di $ROE_\Delta \# ROE_t$, si definisce g^{DIV} quale prodotto tra il tasso di reinvestimento dei profitti e il ROE_Δ.

In breve: se si assume "impropriamente" g^{UN}, il grado di precisione del modello di Gordon è assai elevato; e lo è anche esasperando l'influenza degli altri fattori. Le differenze, in termini relativi, si mantengono al di sotto dell'1%: ad esempio, ponendo ROE_0=28% e g^{CN}=4%[29], esse si aggirano intorno ad uno 0,6%; del tutto trascurabile.

Se, invece, non s'incorre nell'errore di definizione di g^{DIV} e si assume quello effettivo, le difformità aumentano sensibilmente, pur rimanendo contenute entro percentuali che possono oscillare dallo 0,4% del caso qui in esame, a un:

1,13% per ROE_0=28,00% e g^{CN}=2,5%,

1,94% per ROE_0=17,33% e g^{CN}=4,0%,

3,28% per ROE_0=28,00% e g^{CN}=4,0%.

Come può osservarsi, dei due fattori, il tasso di crescita è quello relativamente più influente. Esso, tuttavia, incontra un limite invalicabile nella condizione che di norma viene posta: non deve superare il tasso di sviluppo dell'economia. E al suo rispetto si presta particolare attenzione, dato che la formula viene considerata molto aggressiva.

Minori limiti interessano ROE_t che, di fatto, dipende dalle caratteristiche di sviluppo dell'impresa nella fase immediatamente precedente.[30]

Senza entrare in ulteriori dettagli, dobbiamo avvertire che l'influenza delle suddette variabili sul grado di precisione del modello varia d'intensità se, quale tasso di crescita, si considera quello dei dividendi: che è sistematicamente più basso di g^{CN} e da cui si distacca in funzione diretta dello scarto tra ROE_t e ROE_Δ. In tale ipotesi, inoltre, la loro rilevanza s'inverte a tutto favore di quest'ultimo.

Ai fini del presente lavoro abbiamo preferito assumere g^{CN}, sia perché ci sembra più rappresentativo del fattore crescita, sia perché rende più agevoli e omogenei i raffronti dianzi effettuati. Del resto, la sostanza del fenomeno indagato non muta; l'imprecisione del modello di Gordon, tende a rimanere contenuta e a non eccedere, in casi limite, qualche punto percentuale[31]:

0,53% per ROE_0=17,33% e g^{DIV}=2,0%;

1,94% per ROE_0=17,33% e g^{DIV}=3,3%;

4,26% per ROE_0=28,00% e g^{DIV}=2,0%;

1,19% per ROE_0=28,00% e g^{DIV}=1,25%.

8. Conclusioni

Lo studio di cui abbiamo dato conto è stato affrontato avendo ben presente l'intrinseca essenza di un processo valutativo, le tante approssimazioni e semplificazioni che lo caratterizzano, nonché le difficoltà di reperimento delle informazioni e di stima delle variabili chiave.

Con una certa dose di realismo non si può, quindi, non essere consapevoli che la bontà e l'applicabilità d'un modello di valutazione, diffuso e ben collaudato, permane anche qualora dovesse implicare, in taluni contesti, errori di stima relativamente contenuti.

L'irrinunciabile ricerca di precisione ci ha comunque indotti ad intraprendere la presente analisi, volta ad individuare una formula valutativa appropriata all'ipotesi di crescita con redditività dei nuovi investimenti diversa da quella del capitale in essere. Fattispecie, questa, che rappresenta una possibile modalità di sviluppo delle imprese. Di certo non la norma, ma forse un pò meno infrequente di quanto si possa pensare, specie se si considerano assimilabili ad essa tutti quei casi in cui la crescita implica una lenta e progressiva variazione della redditività media.

In tali circostanze, pur con un'eventuale forzatura circa i tempi di "assestamento" del tasso di redditività, si può adottare una formula valutativa di più agevole applicazione rispetto ai modelli multistadio[32] e più precisa di quella di Gordon. La formula qui individuata ha infatti il pregio della semplicità, richiede un ridotto numero di variabili, può essere applicata in contesti sia di crescita che di stazionarietà, è dotata di una maggiore capacità esplicativa.

Sotto questo profilo ci è sembrata preferibile anche una diversa rappresentazione della tradizionale formula di Gordon. In essa si è provveduto a sostituire una grandezza estremamente sintetica e una variabile composita (i dividendi e il loro tasso di sviluppo) con due distinti parametri: prettamente reddituale (ROE) l'uno, di crescita dimensionale (g^{CN}) l'altro; entrambi riferiti al livello iniziale del capitale proprio. Essi sono di immediata percezione, non implicano problemi di corretta definizione né difficoltà di raffronto; come tali risultano relativamente agevoli da valutare anche sotto il profilo della loro congruità.

Sempre con riferimento alla casistica in esame, l'analisi svolta ha inoltre consentito, sia di appurare la piena validità del modello del VANOC, sia di quantificare il grado di imprecisione della formula di Gordon in funzione dei possibili livelli di crescita e di redditività.

A monte, la disamina delle condizioni di sviluppo economico finanziario e patrimoniale, nonché delle relative coerenze, benché sommaria, si è dimostrata particolarmente utile per comprendere e meglio dominare un fenomeno complesso e articolato che una formula, per quanto esplicativa, consente appena di percepire. Senza tale analisi, difficilmente avremmo potuto raggiungere un'adeguata profondità e cogliere alcune importanti problematiche. Basti pensare alla corretta definizione del tasso di sviluppo dei dividendi e all'erronea identificazione di esso con il tasso di sviluppo degli utili.

NOTE:

[1] Si tratta della formula di una rendita perpetua a rate crescenti applicata, con i dovuti aggiustamenti a livello di variabili input, anche nell'approccio indiretto o asset side. A differenza del modello di Gordon, incentrato su imprese prive di debito, la formula è qui riferita ad imprese levered.

[2] In quest'ultima fattispecie si tratta di determinare il cosiddetto valore terminale per poi attualizzarlo e sommarlo al valore attuale di flussi di cassa determinati analiticamente e relativi al periodo precedente.

[3] Se non ancora conseguita, essa viene posta come target.

[4] Nel lungo periodo difficilmente si considerano valide ipotesi di crescita a tassi superiori a quello di sviluppo dell'economia né tassi di redditività discosti da quelli normali. Anzi, il più delle volte si fa fatica ad accettare che questi eccedano, se non di poco, il costo del capitale: concorrenza e maturità spazzano via le possibilità di extraprofitti. In proposito, si considerino, tra i molti autori: **Brealey-Myers-Sandri [2003]**, p. 65; **Copeland-Koeller–Murrin [2000]**, p.278-284 e 316; **Damodaran[2002]**, varie parti da p.121 a p.170; **Guatri [1998]**, pp.101-105; **Massari [1998]** p.158.

[5] Gli assunti di costanza della leva e della composizione dell'attivo fanno sì che gli ammortamenti da un lato, e gli interessi passivi dall'altro, crescano rispettivamente allo stesso tasso di espansione della struttura e del debito. In tali condizioni, affinché ROE_Δ si mantenga costante, è sufficiente che i ricavi connessi al fatturato (FAT), e i costi al netto degli ammortamenti e degli interessi passivi (CSM) crescano allo stesso tasso di sviluppo del capitale investito. Ciò vale anche nel caso di $ROE_\Delta \# ROE_t$, con la precisazione che in tali circostanze ad incrementarsi allo stesso saggio del capitale investito (come vedremo identificato da g^{CN}) sono i ricavi-FAT e i costi-CST **riferiti alla crescita**, e non ovviamente quelli -cui si sommano- relativi al capitale in essere, che per ovvie ragioni restano costanti.
Limitandoci a queste brevi considerazioni, rinviamo il lettore interessato agli esempi delle tab.1 e 2 per eventuali verifiche e approfondimenti. Dobbiamo però osservare, incidentalmente, che tali ipotesi, insieme a quella di far incrementare ad un tasso costante FAT e CSM riferiti ai nuovi investimenti, oltre a risultare, a nostro avviso, corrette e realistiche, risolvono molti dei problemi indicati, in modo estremamente sintetico, da **Copeland-Koller-Murrin [2002]** p.324-325, ed evitano il ricorso a formule complesse che gli stessi Autori sconsigliano e non ritengono praticabili.

[6] Un'ulteriore semplificazione, qui introdotta per facilitare il calcolo degli oneri finanziari, è che l'impresa sostenga costi con correlate uscite monetarie agli inizi di ogni esercizio per un importo uguale al CCN in essere a tale data e all'incremento annuo del CF e che tutte le restanti uscite ed entrate abbiano luogo simultaneamente alla fine dell'esercizio. Tale condizione garantisce la costanza dell'indebitamento all'interno di ciascun periodo e rende immediato il calcolo degli interessi passivi, pari al prodotto tra il debito in essere agli inizi del periodo per il tasso passivo.

[7] Per i restanti dati patrimoniali e per la ricostruzione del conto economico, rinviamo alla tabella 1, ricordando che il tasso d'interesse sul debito è pari al 6% e l'imposizione fiscale al 33,33%. Tali dati coincidono in ampia misura con quelli degli esempi addotti nell'articolo di **Donna [2002]**.

[8] Per evitare inutili complicazioni assumiamo che l'impresa distribuisca sotto forma di dividendi tutti i flussi di cassa disponibili per gli azionisti, ossia gli utili netti meno i reinvestimenti (ΔCN) necessari per finanziare lo sviluppo.

[9] Cfr. **Gordon-Shapiro [1956]**.

[10] In questo lavoro il primo esercizio, come può desumersi dalle tabelle, è riferito al periodo t=0. Inoltre gli investimenti e il loro finanziamento hanno luogo alla fine di ciascun esercizio; per questa ragione i simboli di riferimento temporale, non sono sfasati di un periodo rispetto alle altre grandezze.

[11] Le due fonti di reperimento dei mezzi propri in assenza di distorsioni a livello di fiscalità, di asimmetrie informative e di costi di transazione possono considerarsi equivalenti. Per una chiara trattazione dell'argomento, e per una disamina degli studi e delle verifiche empiriche circa la rilevanza della politica dei dividendi, succedutisi al noto articolo di **Miller-Modigliani [1961]**, segnaliamo: **Brealey-Myers-Sandri [2003],** pp. 403-442; **Cattaneo [1999],** pp. 456-474; **Copeland-Weston [1994]**, cap. 15; **Damodaran [1999],** pp. 445-485 e 509-550; **Ross–Westerfield–Jaffe [1997],** pp. 645-687; **Van Horne [1984],** pp.426-454.

[12] Approfittiamo delle due equazioni e relativi esempi per verificare una nota e fondamentale relazione in tema di valore. In essi Ve è sempre superiore al valore di libro (CN=600) grazie al fatto che ROE_t è più elevato di Ke. Se fosse uguale, la frazione si ridurrebbe all'unità in entrambe le formule e Ve finirebbe per coincidere con CN, passando quindi a 600. In questo caso la crescita non aggiungerebbe valore: sarebbe solo un rigonfiamento dimensionale. La situazione si trasformerebbe in una distruzione di ricchezza per gli azionisti se la redditività scendesse al disotto del costo del capitale; distruzione tanto maggiore quanto più intensa è la crescita. Le relazioni suddette non sono direttamente desumibili dall'originaria espressione della formula di Gordon, né lo sono con riferimento al caso più articolato, qui in esame, della crescita in presenza di difformità tra la redditività del capitale in essere e quella dei nuovi investimenti.

[13] Il tasso di reinvestimento degli utili è pari al rapporto tra il fabbisogno incrementale di capitali propri dettato dalla crescita e l'utile netto del periodo ($\alpha=\Delta CN_t/UN_t$). Esso viene fatto qui coincidere con quello di ritenzione degli utili o di autofinanziamento, nell'assunto che si distribuisca tutta la parte di utili eccedente il fabbisogno di finanziamento, a titolo di mezzi propri, dei nuovi investimenti. Sull'opportunità di non confondere, ai fini della valutazione d'impresa, la ritenzione degli utili con il reinvestimento si veda **Copeland-Weston [1994]** cap.15, parr. 4 e 5.

[14] E' opportuno osservare che il livello di α al primo anno è uguale a quello del caso di crescita in costanza di ROE_t; caso contraddistinto anche dalla costanza di α. Cfr, rispettivamente, tab. 1 e 2.

[15] Tale livello viene conseguito quando ROE_t si allinea a ROE_Δ.

[16] Per un'analisi più esaustiva delle varie dinamiche può essere di ausilio la tabella 2, cui si rinvia.

[17] Che ci risulti, nei principali testi ricorre esclusivamente la suddetta definizione di g^{DIV} o altre analoghe che comunque riconducono ad essa. Ci limitiamo a segnalare: **Brealey-Myers-Sandri [2003]**, pp. 60-66; **Cattaneo[1999],** pp. 134-135; **Copeland-Koeller-Murrin [2002],** p.159 e 306 (qui il tasso di crescita è riferito ai profitti operativi, ma si hanno le medesime implicazioni) **;** **Copeland-Weston[1994]**, p. 794; **Damodaran [1999]**, p. 571, 575, 576 e in particolare 582; **Gordon-Shapiro [1956],** p.106**; Ross–Westerfield–Jaffe [1997],** pp. 138-140.

[18] Ciò vale per qualsiasi anno: α_t*ROE_Δ fornisce sempre il valore di $g^{UN}{}_t$. Cfr. tabella 2a, colonne 14, 17 e 18.

[19] La [5a] si ricava con opportuni sviluppi da: (DIVt+1/DIVt)-1. Volendo è possibile addivenire a formulazioni diverse, in cui appare solo ROE_o oppure in cui entrano ROE_Δ e ROE_t o altre variabili che interessa evidenziare (CN, UN, …).

[20] Essendo $g^{CN}=g^{CIN}$, è indifferente riferirsi al capitale proprio o al capitale investito netto.

[21] Si basava sull'individuazione del valore del diritto d'opzione nell'ipotesi di aumenti di capitale con emissione di azioni alla pari.

[22] Se ROE_Δ fosse pari a 17,33%, il valore delle opportunità di crescita sarebbe 36,3636, a conferma delle stime precedentemente effettuate. Come ovvio, essendo l'orizzonte infinito, il valore delle opportunità di crescita, se nulla muta, resta costante. Sicché di anno in anno a variare, per effetto della variazione di ROE_t, è il valore dell'impresa in assenza di crescita.

[23] Stante la costanza di valore del fattore di rettifica, ciò che varia e fa variare Ve_t, è la prima parte della formula che definisce il valore dell'equity in ipotesi di crescita con $ROE_\Delta=ROE_t$. In questa, a sua volta, a variare è soltanto ROE_t.

[24] Posto $ROE_\Delta=Ke$, si sviluppa come segue:

$$Ve = CN_t \left[\frac{ROE_t - g^{CN}}{Ke - g^{CN}} + \left(\frac{g^{CN}}{Ke}\;\frac{Ke - ROE_t}{Ke - g^{CN}}\right)\right] = CN_t \left[\frac{ROE_t}{Ke - g^{CN}} - \frac{g^{CN}}{Ke - g^{CN}} + \left(\frac{g^{CN}}{Ke - g^{CN}} - \frac{g^{CN}}{Ke}\;\frac{ROE_t}{Ke - g^{CN}}\right)\right] =$$

$$= CN_t \left[\frac{ROE_t}{Ke - g^{CN}}\left(1 - \frac{g^{CN}}{Ke}\right)\right] = CN_t\,\frac{ROE_t}{Ke}$$

[25] Scarto rapportato a CN_t e ponderato per Ke e per g^{CN}.

[26] Come ovvio, ne risulta confermata, posto ve ne sia bisogno, anche la validità del metodo del VANOC. Eventuali imprecisioni di calcolo sono dovute esclusivamente all'arrotondamento dei decimali.

[27] Tale identità è necessaria per assicurare una condizione d'indifferenza tra la sottoscrizione delle azioni (previa acquisizione dei necessari diritti) e il loro acquisto sul mercato.

[28] Per verificare la posizione di indifferenza dei vecchi azionisti ci rifacciamo all'approccio seguito nel testo. Il rendimento complessivo da loro ritratto è pari a 106,18143 ossia: ai dividendi ricevuti (104) più i diritti d'opzione monetizzati (4,2934) meno la perdita subita in linea capitale (2,112) dovuta alla flessione del valore unitario delle azioni da 8,16783 a 8,14671. In termini percentuali (106,18143/816,783) esso è uguale al costo del capitale Ke, vale a dire al rendimento da loro desiderato: 13%. I valori sono quindi coerenti. Piccole difformità, rispetto ad analoghe valutazioni effettuate agli inizi del paragrafo, sono dovute alla troncatura dei decimali.

[29] Per uniformità di raffronto, in questa parte ci riferiamo sempre al tasso di crescita del capitale. Nel caso in esame, a g^{CN}=4% corrisponde:
per ROE_t=28,00%, un g^{DIV}=1,83% e un g^{UN}=2,14%;
per ROE_t=17,33%, un g^{DIV}=3,30% e un g^{UN}=3,46%.

[30] Anche nei confronti di questa variabile, stanti le condizioni che caratterizzano la fase di maturità, non si può eccedere circa la sua elevatezza.

[31] Che ROE_t, come segnalato, dispieghi un'influenza relativamente più elevata rispetto ai raffronti fatti con g^{CN} è del tutto evidente dalle percentuali di scostamento della formula di Gordon sopra riportate.

[32] In presenza di determinate condizioni circa il trend evolutivo del tasso di redditività potrebbe risultare preferibile anche all'adozione di modelli che nascono con l'intento di sostituirsi a quelli a più stadi, giudicati troppo complessi e di difficile applicazione. Uno dei più noti è il modello H di **Fuller-Hsia [1984].**

LEGENDA

α = tasso di reinvestimento degli utili netti
AMM = ammortamenti (20% di CF)
CCN = capitale circolante netto
CF = immobilizzazioni nette o struttura
CG = guadagni (perdite) in conto capitale
CIN = capitale investito netto
CN = capitale proprio o equity
CSM = costi totali meno AMM e meno IP
D = debiti
DIV = dividendi distribuiti (UN_t-ΔCN_t)
EBIT = RO
FAT = Ricavi lordi o fatturato
g^{CIN} = tasso di crescita del capitale investito
g^{CN} = tasso di crescita del capitale proprio
g^{D} = tasso di crescita del debito
IP = interessi passivi o oneri finanziari netti (6% di D)
Ke = costo del capitale proprio (13%)
NAZ_t = azioni in circolazione nel periodo t
ΔNAZ_t = azioni emesse nel periodo t
RE_t = rendimento complessivo ritratto dagli azionisti nel periodo t
RO = risultato operativo o utile a lordo degli interessi e delle imposte (EBIT)
ROE_Δ = ROE dei capitali propri investiti nello sviluppo, o ROE marginale
ROE_t = ROE del capitale in essere, o ROE medio (per t=0 identifica il ROE in essere agli inizi del periodo di valutazione)
T = imposte sul reddito dell'impresa (33% di EBIT-IP)
UN = utile netto
VD = valore complessivo dei diritti d'opzione
Ve = valore dell'equity
Ve' = valore dell'equity in assenza di crescita

BIBILIOGRAFIA

Brealey-Myers-Sandri [2003]; B. Brealey - S. Myers - S. Sandri, *Principi di finanza aziendale,* McGraw-Hill Italia 2003.

Cattaneo [1999] - **Mario Cattaneo** (a cura di)**,** *Manuale di finanza aziendale,* Il Mulino 1999.

Copeland–Weston[1994] - T. Copeland – J. Weston, *Teoria della finanza e politiche d'impresa,* Egea1994.

Copeland-Koeller–Murrin [2000] - T. Copeland - T.Koeller –J. Murrin, *Il valore dell'impresa. Strategie di valutazione e gestione,* Il Sole 24 Ore Spa, 2000.

Damodaran [1999] - A. Damodaran, *Finanza Aziendale***,** Apogeo 1999.

Damodaran [2002] - A. Damodaran, *Valutazione delle aziende,* Apogeo 2002.

Donna [2002] – G. Donna, *Gli ingredienti strategici del Valore d'Impresa,* in La valutazione delle aziende, Dicembre 2002, n. 27.

Fuller-Hsia[1984] – R.J. Fluller-C.C. Hsia, *A Simplified Common Stock Valuation Model,* in Financial Analist Journal, september-october 1984 p.49-56.

Gordon-Shapiro [1956] – M. J. Gordon–E. Shapiro, *Capital Equipment Analysis: the Required Rate of Profit*, Management Science, october 1956, pp. 102-110.

Guatri [1998] – Guatri, *Trattato sulla valutazione delle aziende,* Egea 1998.

Massari [1998] – M. Massari, *Finanza Aziendale. Valutazione,* McGraw-Hill Italia, 1998.

Miller-Modiglian [1961] – M.Miller e F. Modigliani, Dividend Policy, *Growth and the Valuation of Shares, in Journal of Business,* october 1961.

Ross–Westerfield–Jaffe[1997] - S.A. Ross – R.W. Westerfield – J.F. Jaffe, *Finanza aziendale,* Il Mulino 1997.

Van Horne[1984] – J.G. Van Horne, *Teoria e tecnica della finanza d'impresa,* Il Mulino 1984.

Tab. 1: Crescita al 2% annuo in costanza di ROE ($ROE_t=ROE_\Delta=17{,}33\%$): Valore dell'equity

	STATO PATRIMONIALE					CONTO ECONOMICO										Ve_t	Ve_t	
	ATTIVO			PASSIVO														
t	CCN	CF	CIN	D	CN	FAT	AMM	CSM	EBIT	IP	T	UN	ROE_t	DIV_t	α		unitario	g
	1	2	3 = (1+2)=(4+5)	4	5	6	7 = (2)*20%	8	9 = (6-7-8)	10 = (4)*6%	11 = (9-10)*33%	12 = (9-10-11)	13 = ROE_Δ	14 = UN_t-ΔCN_t	15 = $\Delta CN_t/UN_t$	16	17	di tutte le grandezze
0	200,00	800,00	1.000,00	400,00	600,00	700,00	160,00	360,00	180,00	24,00	52,00	104,00	17,33%	92,00	11,538%	836,36	1,394	2%
1	204,00	816,00	1.020,00	408,00	612,00	714,00	163,20	367,20	183,60	24,48	53,04	106,08	17,33%	93,84	11,538%	853,09	1,394	2%
2	208,08	832,32	1.040,40	416,16	624,24	728,28	166,46	374,54	187,27	24,97	54,10	108,20	17,33%	95,72	11,538%	870,15	1,394	2%
3	212,24	848,97	1.061,21	424,48	636,72	742,85	169,79	382,03	191,02	25,47	55,18	110,37	17,33%	97,63	11,538%	887,56	1,394	2%
4	216,49	865,95	1.082,43	432,97	649,46	757,70	173,19	389,68	194,84	25,98	56,29	112,57	17,33%	99,58	11,538%	905,31	1,394	2%
5	220,82	883,26	1.104,08	441,63	662,45	772,86	176,65	397,47	198,73	26,50	57,41	114,82	17,33%	101,58	11,538%	923,41	1,394	2%
10	243,80	975,20	1.218,99	487,60	731,40	853,30	195,04	438,84	219,42	29,26	63,39	126,78	17,33%	112,15	11,538%	1.019,52	1,394	2%
20	297,19	1.188,76	1.485,95	594,38	891,57	1.040,16	237,75	534,94	267,47	35,66	77,27	154,54	17,33%	136,71	11,538%	1.242,79	1,394	2%
30	362,27	1.449,09	1.811,36	724,54	1.086,82	1.267,95	289,82	652,09	326,04	43,47	94,19	188,38	17,33%	166,65	11,538%	1.514,96	1,394	2%
40	441,61	1.766,43	2.208,04	883,22	1.324,82	1.545,63	353,29	794,89	397,45	52,99	114,82	229,64	17,33%	203,14	11,538%	1.846,72	1,394	2%
50	538,32	2.153,27	2.691,59	1.076,64	1.614,95	1.884,11	430,65	968,97	484,49	64,60	139,96	279,93	17,33%	247,63	11,538%	2.251,15	1,394	2%
60	656,21	2.624,82	3.281,03	1.312,41	1.968,62	2.296,72	524,96	1.181,17	590,59	78,74	170,61	341,23	17,33%	301,85	11,538%	2.744,13	1,394	2%
90	1.188,63	4.754,51	5.943,13	2.377,25	3.565,88	4.160,19	950,90	2.139,53	1.069,76	142,64	309,04	618,09	17,33%	546,77	11,538%	4.970,62	1,394	2%

Tab. 2.a: Crescita al 2% con ROE_t diverso dal ROE_Δ (ROE_0=17,33%; ROE_Δ=15,%)

	STATO PATRIMONIALE					CONTO ECONOMICO												
	ATTIVO			PASSIVO														
t	CCN	CF	CIN	D	CN	FAT	AMM	CSM	EBIT	g^{EBIT}	IP	T	UN	g^{UN}	ROE_t	DIV	g^{DIV}	α
	1	2	3 = (1+2)=(4+5)	4	5	6 =	7 = (2)*20%	8	9 = (6-7-8)	10	11 = (4)*6%	12 = (9-11)*33%	13 = (9-11-12)	14	15	16 = UN_t-ΔCN_t	17	18 = $\Delta CN_t/UN_t$
0	200,00	800,00	1.000,00	400,00	600,00	700,00	160,00	360,00	180,00	1,767%	24,00	52,00	104,00	1,731%	17,3333%	92,00	1,6957%	11,5385%
1	204,00	816,00	1.020,00	408,00	612,00	714,00	163,20	367,62	183,18	1,771%	24,48	52,90	105,80	1,735%	17,2876%	93,56	1,7007%	11,5690%
2	208,08	832,32	1.040,40	416,16	624,24	728,28	166,46	375,39	186,42	1,775%	24,97	53,82	107,64	1,740%	17,2427%	95,15	1,7057%	11,5991%
3	212,24	848,97	1.061,21	424,48	636,72	742,85	169,79	383,32	189,73	1,779%	25,47	54,75	109,51	1,744%	17,1987%	96,77	1,7107%	11,6288%
4	216,49	865,95	1.082,43	432,97	649,46	757,70	173,19	391,41	193,11	1,783%	25,98	55,71	111,42	1,749%	17,1556%	98,43	1,7155%	11,6580%
5	220,82	883,26	1.104,08	441,63	662,45	772,86	176,65	399,65	196,55	1,786%	26,50	56,68	113,37	1,753%	17,1134%	100,12	1,7203%	11,6868%
10	243,80	975,20	1.218,99	487,60	731,40	853,30	195,04	443,44	214,82	1,804%	29,26	61,85	123,71	1,774%	16,9141%	109,08	1,7433%	11,8244%
20	297,19	1.188,76	1.485,95	594,38	891,57	1.040,16	237,75	545,15	257,27	1,837%	35,66	73,87	147,74	1,810%	16,5703%	129,90	1,7845%	12,0698%
30	362,27	1.449,09	1.811,36	724,54	1.086,82	1.267,95	289,82	669,13	309,01	1,864%	43,47	88,51	177,02	1,842%	16,2882%	155,29	1,8197%	12,2789%
40	441,61	1.766,43	2.208,04	883,22	1.324,82	1.545,63	353,29	820,26	372,08	1,887%	52,99	106,36	212,72	1,868%	16,0567%	186,23	1,8496%	12,4558%
50	538,32	2.153,27	2.691,59	1.076,64	1.614,95	1.884,11	430,65	1.004,50	448,96	1,906%	64,60	128,12	256,24	1,891%	15,8669%	223,94	1,8750%	12,6049%
60	656,21	2.624,82	3.281,03	1.312,41	1.968,62	2.296,72	524,96	1.229,07	542,68	1,923%	78,74	154,64	309,29	1,909%	15,7112%	269,92	1,8963%	12,7298%
90	1.188,63	4.754,51	5.943,13	2.377,25	3.565,88	4.160,19	950,90	2.243,34	965,96	1,957%	142,64	274,44	548,88	1,949%	15,3926%	477,56	1,9414%	12,9932%

Tab. 2.b: segue: Valore dell'equity

MODELLO del VANOC $g^{VAN}= g^{VANOC}=2\%$					GORDON "rettificata"		G0R DON con g^{Div}	con g^{UN}	
VANt 19	VANOCt 20	Ve'_t 21	$g^{Ve'}$ 22	Ve_t 23 = (20+21)	Ve_t 24	g^{Ve} 25	Ve_t 26	Ve_t 27	
1,8462	16,78322	800,00	1,731%	816,78	816,78	1,736%	813,846	816,382	0
1,8831	17,11888	813,85	1,735%	830,96	830,96	1,741%	828,018	830,563	1
1,9207	17,46126	827,97	1,740%	845,43	845,43	1,745%	842,473	845,027	2
1,9592	17,81048	842,37	1,744%	860,19	860,19	1,750%	857,218	859,781	3
1,9983	18,16669	857,07	1,749%	875,23	875,23	1,754%	872,258	874,829	4
2,0383	18,53003	872,06	1,753%	890,59	890,59	1,758%	887,599	890,179	5
2,2505	20,45865	951,61	1,774%	972,07	972,07	1,778%	969,038	971,658	10
2,7433	24,93898	1.136,42	1,810%	1.161,36	1.161,36	1,815%	1.158,249	1160,942	20
3,3441	30,40047	1.361,71	1,842%	1.392,11	1.392,11	1,845%	1.388,925	1391,681	30
4,0764	37,05801	1.636,33	1,868%	1.673,39	1.673,39	1,871%	1.670,145	1672,955	40
4,9691	45,17351	1.971,10	1,891%	2.016,27	2.016,27	1,893%	2.012,973	2015,828	50
6,0573	55,06625	2.379,18	1,909%	2.434,24	2.434,24	1,912%	2.430,897	2433,792	60
10,9719	99,74489	4.222,17	1,949%	4.321,91	4.321,91	1,950%	4.318,476	4321,453	90

Tab. 3: Autofinanziamento, aumenti di capitale a pagamento, valore delle azioni e dei diritti di opzione

		REINVESTIMENTO DEGLI UTILI E COSTANZA DI NAZ				AUMENTI DI CAPITALE A PAGAMENTO CON EMISSIONE DI NUOVE AZIONI ALLA PARI							
t	Ve_t 1	VAZ 2	CG totale o ΔVAZ*NAZ 3	DIV_t = e 4	RE_t = Ve_t*13% 5 = (4)+(3)	VAZ 6	CG o ΔVAZ 7	NAZ 8	CG totale o ΔVAZ*NAZ 9	DIV_t = UN_t 10	RE_t = Ve_t * 13% 11 = (7)+(8)+(12)	VD_t di equilibrio 12 = (11)-(10)-(9)	VD_t /ΔNAZ di equilibrio 13
0	816,7831	8,16783	14,18182	91,99998	106,18180	8,16783	-0,02112	100,0000	-2,11161	103,99998	106,18180	4,29343	2,14671
1	830,9649	8,30965	14,46545	93,55998	108,02543	8,14671	-0,02070	102,0000	-2,11161	105,79998	108,02543	4,33707	2,12601
2	845,4303	8,45430	14,75476	95,15118	109,90594	8,12601	-0,02030	104,0400	-2,11161	107,63598	109,90594	4,38157	2,10572
3	860,1851	8,60185	15,04986	96,77420	111,82406	8,10572	-0,01990	106,1208	-2,11161	109,50870	111,82406	4,42697	2,08582
4	875,2350	8,75235	15,35086	98,42969	113,78054	8,08582	-0,01951	108,2432	-2,11161	111,41887	113,78054	4,47328	2,06631
5	890,5858	8,90586	15,65787	100,11828	115,77616	8,06631	-0,01913	110,4081	-2,11161	113,36725	115,77616	4,52051	2,04718
10	972,0700	9,72070	17,28756	109,08154	126,36910	7,97436	-0,01732	121,8994	-2,11161	123,70948	126,36910	4,77124	1,95704
20	1.161,3639	11,61364	21,07344	129,90388	150,97731	7,81565	-0,01421	148,5947	-2,11161	147,73525	150,97731	5,35368	1,80144
30	1.392,1122	13,92112	25,68840	155,28618	180,97458	7,68545	-0,01166	181,1362	-2,11161	177,02252	180,97458	6,06367	1,67379
35	1.525,7957	15,25796	28,36207	169,99137	198,35344	7,62940	-0,01056	199,9890	-2,11161	193,99004	198,35344	6,47501	1,61884
n						7,090909							